Tentamen Golven en Optica – 31 januari 2013

P. Dendooven

Opgaven en antwoorden

Opgave 1: Intensiteit en amplitude elektromagnetische golf (5 punten)

Veronderstel een laserbundel in vacuüm met een vermogen van 2000 W die geconcentreerd wordt tot een doorsnede van 10^{-6} cm^2.

Vragen:

1. Wat is de intensiteit (Engels: *irradiance*) van deze bundel ?
2. Wat is de amplitude van het elektrisch veld van de corresponderende (harmonische) elektromagnetische golf ?
3. Wat is de amplitude van het magnetisch veld van de corresponderende (harmonische) elektromagnetische golf ?

Geef bij alle antwoorden ook de fysische eenheden !

Extra informatie: De energie per tijd- en oppervlakte-eenheid van een elektromagnetische golf wordt gegeven door de grootte van de Poyntingvector: $S(t) = c^2\, \varepsilon_0\, E(t)\, B(t)$, met c de lichtsnelheid, $c = 3 \times 10^8$ m/s, ε_0 de permittiviteit van het vacuüm, $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ J/(V^2 m), en $E(t)$, $B(t)$ de grootte van het elektrisch, magnetisch veld.

Antwoord:

1. intensiteit ≡ tijdsgemiddelde van de energie per tijd- en oppervlakte-eenheid = vermogen per oppervlakte-eenheid
   intensiteit = 2000 W / 10^{-6} cm^2 = 2×10^9 W/cm^2 (= 2×10^{13} W/m^2)

voor een harmonische elektromagnetische golf (bewegend in bijv. de x-richting):

$$I \equiv \left\langle S(t) \right\rangle_T = c^2 \varepsilon_0 E_0 B_0 \left\langle \cos^2\left(kx - \omega t\right) \right\rangle_T = \tfrac{1}{2} c^2 \varepsilon_0 E_0 B_0$$

verder geldt: $B_0 = \dfrac{1}{c} E_0$, zodat $I = \tfrac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$

2. $$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{2 \times 2 \times 10^{13}\ W/m^2}{3 \times 10^8 \times 8.854 \times 10^{-12} (m/s)(J/V^2/m)}}$$

$$= 1.23 \times 10^8 \sqrt{\frac{J\ s\ V^2\ m}{s\ m^2\ m\ J}} = 1.23 \times 10^8 \sqrt{\frac{V^2}{m^2}} = 1.23 \times 10^8 \frac{V}{m}$$

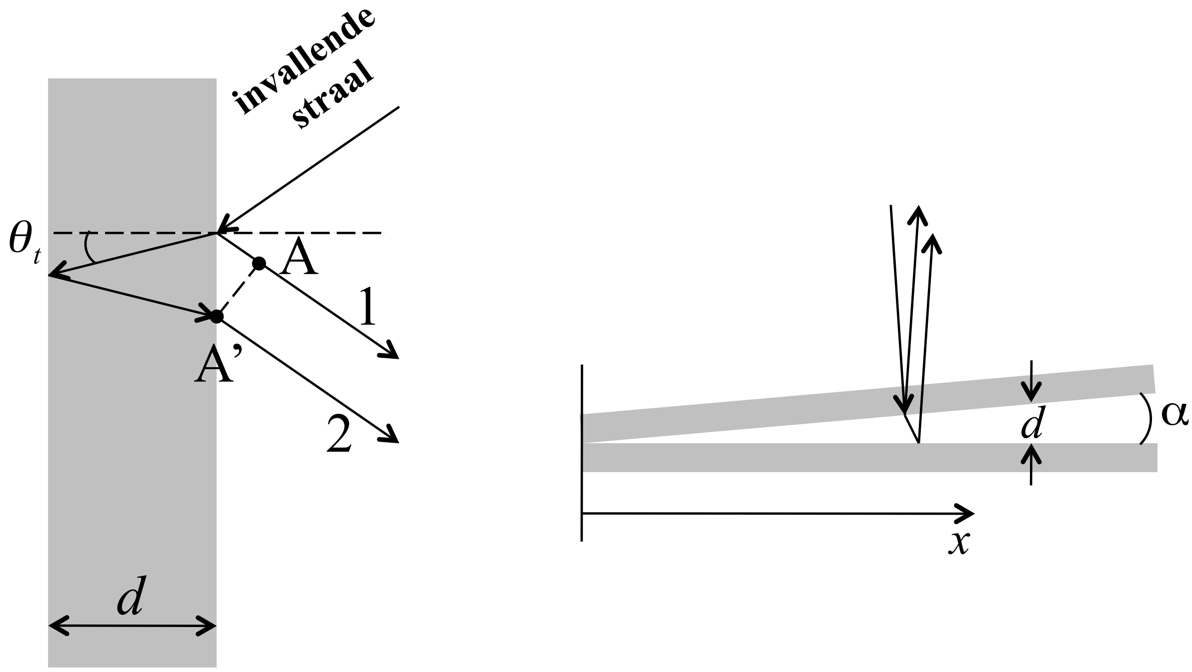
3. $$B_0 = \frac{1}{c} E_0 = \frac{1.23 \times 10^8}{3 \times 10^8} \frac{V\ s}{m^2} = 0.41\ T$$

Opgave 2: Interferentie van twee lichtstralen (8 punten)

Beschouw onderstaande figuur links. Een lichtstraal valt in op een dunne film met dikte d en brekingsindex n_f. Aan beide zijden van de film bevindt zich hetzelfde materiaal. Aan het oppervlak wordt een deel van de straal weerkaatst (straal 1) en een deel gebroken. De gebroken straal weerkaatst gedeeltelijk aan de achterkant van de film en treedt na breking aan de voorkant uit de film als straal 2. Het faseverschil tussen straal 1 in punt A en straal 2 in punt A' is:

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_f} d \cos\theta_t - \pi \quad (1)$$

Hierbij is λ_f de golflengte van het licht in het materiaal van de film en θ_t de brekingshoek zoals aangegeven in de figuur.



Vraag:

1. De twee termen in vergelijking (1) hebben een verschillende fysische oorsprong. Leg uit in woorden wat deze oorsprongen zijn.

Beschouw nu een wig tussen 2 vlakke oppervlakken in lucht (zie bovenstaande figuur rechts). Veronderstel een kleine wighoek α en nagenoeg loodrecht invallend licht. Door interferentie van de weerkaatse stralen (analoog aan stralen 1 en 2 uit de figuur links maar met de wig als dunne film) ontstaat een lijnenpatroon in de x-richting, de zogenoemde Fizeau-franjes.

Vraag:

2. Leidt een vergelijking af voor de wighoek α in termen van het verschil in positie x tussen naburige maxima van de Fizeau-franjes.

Antwoord:

1. eerste term: verschil in optische weglengte

   tweede term: als de brekingsindex van de film groter is dan die van het medium waarin de film zich bevindt ondergaat straal 1 externe en straal 2 interne reflectie (of vice versa als de brekingsindex van de film kleiner is dan die van het medium). In alle gevallen is er dus één straal die externe en één straal die interne reflectie ondergaat. Dit levert altijd een faseverschil van π op tussen de 2 stralen.

2.

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{d}{x}$ α klein : $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha \rightarrow d = \alpha x$

≈ loodrechte inval : $\theta_t \approx 0 \rightarrow \cos\theta_t \approx 1$

dan wordt : $\delta = \frac{4\pi}{\lambda_f}\alpha x - \pi$

het interferentiepatroon is maximaal als $\delta = 2m\pi$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$

$2m\pi = \frac{4\pi}{\lambda_f}\alpha x_{max} - \pi$ x_{max} = positie van de maxima

$x_{max} = \frac{m + 1/2}{2\alpha}\lambda_f$

afstand tussen 2 maxima : $\Delta x_{max} = \frac{\lambda_f}{2\alpha}$

$$\alpha = \frac{\lambda_f}{2\Delta x_{max}}$$

Opgave 3: Fraunhoferdiffractie aan een spleet (4 punten)

De intensiteit van het Fraunhoferdiffractiepatroon van een spleet met breedte b, in functie van de hoek θ ten opzichte van de loodrechte op het midden van de spleet, wordt gegeven door:

$$I(\theta) = I(0)\left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2, \text{ met } \beta = \frac{kb}{2}\sin\theta$$

(k is het voortplantingsgetal van het gebruikte licht). De intensiteit is minimaal, en gelijk aan nul, voor $\sin\beta = 0$, met uitzondering van $\beta = 0$ (overeenkomend met het centrale maximum).

<u>Vraag:</u>

Veronderstel dat een spleet met een breedte van 0.05 mm wordt belicht door licht met een golflengte van 532 nm. Wat is dan de hoekbreedte van het centrale maximum van het Fraunhoferdiffractiepatroon ?

$\sin\beta = 0 \rightarrow \beta = \pm m\pi$, $m = 1, 2, 3, \ldots$

1^e minima : $m = 1$, $\beta = \pm\pi$

$\beta = \pi \rightarrow \frac{kb}{2}\sin\theta = \pi$

$\sin\theta = \frac{2\pi}{kb} = \frac{2\pi\lambda}{2\pi b} = \frac{\lambda}{b}$

$\theta = \sin^{-1}\frac{\lambda}{b} = \sin^{-1}\frac{532\ 10^{-9}\,m}{0.05\ 10^{-3}\,m}$

$= \sin^{-1}(0.01064)$

$= 0.610^\circ$

hoekbreedte centrale maximum $= 2\theta = 1.22^\circ$

Opgave 4: Fresnelzones (6 punten)

Beschouw diffractie aan een opening in een scherm. Het oppervlak A van Fresnelzones van kleine orde is constant (dus onafhankelijk van ℓ, het nummer van de Fresnelzone) en gelijk aan:

$$A = \frac{\pi \rho r_0 \lambda}{\rho + r_0}$$

Hierbij is ρ de afstand van de puntbron tot de opening, r_0 de afstand van de opening tot het scherm waar het diffractiepatroon bekeken wordt en λ de golflengte van het gebruikte licht.

Vraag:

Toon aan dat wanneer een cirkelvormige opening binnen de eerste Fresnelzone valt, we te maken hebben met Fraunhoferdiffractie.

Antwoord:

oppervlakte cirkelvormige opening $= \pi a^2$

a = straal opening

opening binnen 1e Fresnelzone $\rightarrow \pi a^2 < A \rightarrow \frac{\pi a^2}{A} < 1$

$$\frac{\pi a^2 (\rho + r_0)}{\rho \pi r_0 \lambda} < 1$$

$$\frac{a^2}{\lambda} < \frac{\rho r_0}{\rho + r_0}$$

voorwaarde is voldaan als ρ en r_0 "groot genoeg" zijn

algemene voorwaarde voor Fraunhoferdiffractie:

$\frac{a^2}{\lambda} < R$ met R de kleinste afstand $\underbrace{\text{bron-opening}}_{=\rho}$ of $\underbrace{\text{opening-scherm}}_{=r_0}$

voorwaarden zijn dus analoog

Opgave 5: Verband Fraunhoferdiffractie - Fouriertransformatie (7 punten)

Voor Fraunhoferdiffractie aan een willekeurige opening (zie onderstaande figuur) met een constante bronsterkte per oppervlakte-eenheid (ε_A) wordt de amplitude van het elektrisch veld in het punt P gegeven door:

$$E(Y,Z) = \frac{\varepsilon_A\, e^{i(\omega t - kR)}}{R} \iint_{\text{opening}} e^{ik(Yy+Zz)/R}\, dy\, dz$$

De betekenis van de coördinaten y,z en Y,Z wordt uit de figuur duidelijk. R is de afstand van het punt P tot de oorsprong van het coördinatenstelsel.
Voor een meer algemeen geval waarin de bronsterkte per oppervlakte-eenheid niet constant is, $\varepsilon_A(y,z)$, wordt de openingsfunctie $A(y,z)$ gedefinieerd.

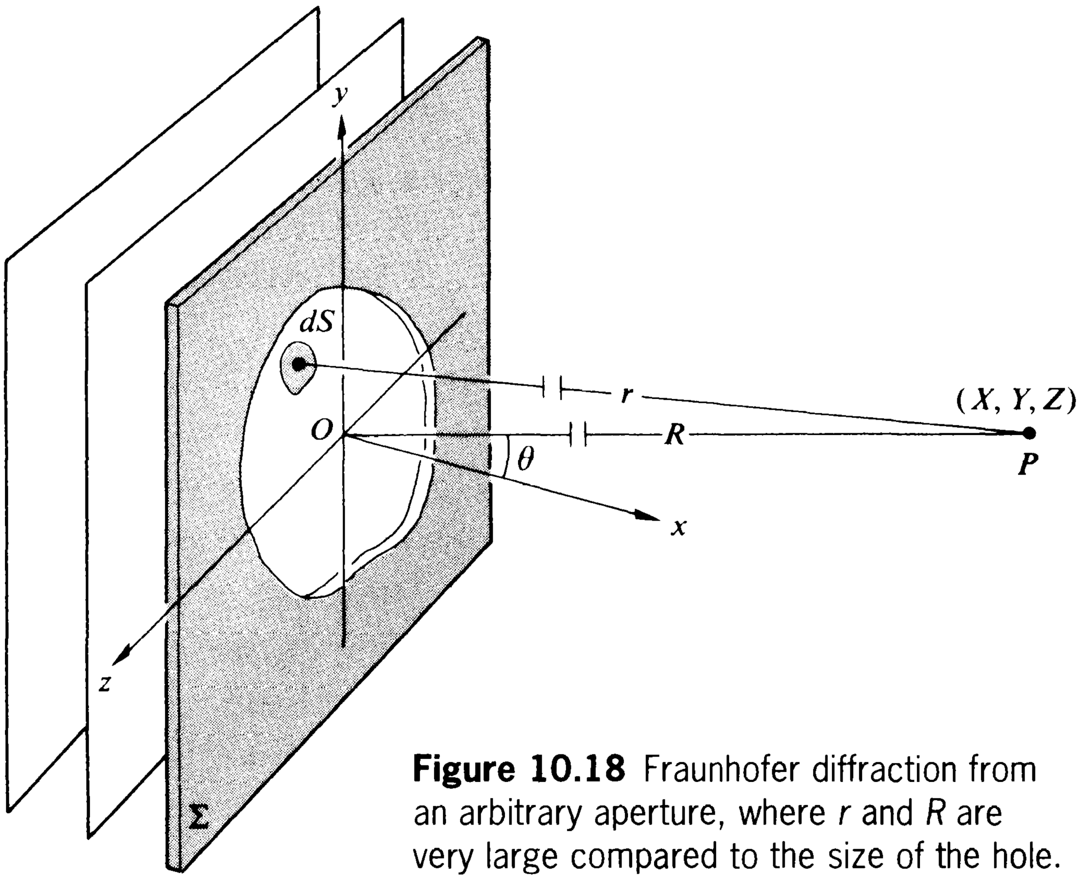


Figure 10.18 Fraunhofer diffraction from an arbitrary aperture, where r and R are very large compared to the size of the hole.

Vragen:

1. Wat is de wiskundige uitdrukking voor de definitie van de openingsfunctie ?
2. Toon aan wat het verband is tussen het Fraunhoferdiffractiepatroon en de 2-dimensionale Fouriertransformatie.
   De 2-dimensionale Fouriertransformatie van een functie afhankelijk van 2 variabelen wordt gegeven door:

$$\mathscr{F}(f(y,z)) \equiv F(k_y,k_z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(y,z)\, e^{i(k_y y + k_z z)} dy\, dz$$

Antwoord:

voor $\mathcal{E}_A$ niet constant:

$$E(Y,Z) = \iint_{\text{opening}} \underbrace{\mathcal{E}_A(y,z)\,\frac{e^{i(\omega t - kR)}}{R}}_{\equiv A(y,z) \text{ openingsfunctie}}\, e^{ik(Yy+Zz)/R}\, dy\, dz$$

2D-Fouriertransformatie van een functie $f(y,z)$:

$$F(k_y,k_z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(y,z)\, e^{i(k_y y + k_z z)}\, dy\, dz \qquad (1)$$

definier ruimtelijke frequenties $k_Y \equiv \frac{kY}{R}$; $k_Z \equiv \frac{kZ}{R}$

E kan dan geschreven worden als functie van k_Y, k_Z:

$$E(k_Y,k_Z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(y,z)\, e^{i(k_Y y + k_Z z)}\, dy\, dz \qquad (2)$$

↳ $A(y,z) = 0$ buiten de opening, integratiegrenzen kunnen dus $\pm\infty$ zijn

vergelijk (1) en (2): de velddistributie van een Fraunhofer-diffractiepatroon is de Fouriertransformatie van de openingsfunctie